Compunerea capacitanţelor energetice de ordinul II

Aurel Rusu Duma (rusuduma@yahoo.com)

1 Reguli de compunere a capacitanţelor energetice

Dacă masa este o capacitanţă energetică de ordinul II pentru energia cinetică (vezi cap. 7), iar capacitanţa unui condensator electric (capacitor) sau inductanţa unei bobine (inductor) sunt tot capacitanţe de ordinul II (pentru energia electrostatică, respectiv pentru cea magnetică) înseamnă că masa şi cele două capacitanţe EM sunt obiecte abstracte echivalente (din p.d.v. energetic evident). Dar pentru capacitori şi inductori există relaţii clare de compunere ale capacitanţelor pentru elementele montate în serie sau în paralel. De ce n-ar exista asemenea relaţii şi pentru mase?

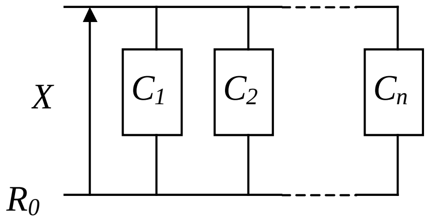

Fig. 1.1

Pentru capacitorii montaţi în paralel (vezi fig. 1.1), atributul de stare energetică X (tensiunea U evaluată faţă de referinţa absolută R_0) este acelaşi pentru toate elementele, adică atributul de stare energetică este distribuit uniform pe mulţimea elementelor conectate. În acest caz capacitanţa totală este suma capacitanţelor elementelor:

$$C_T = C_1 + C_2 + ... + C_n \tag{1.1}$$

În cazul inductorilor conectaţi în serie atributul de stare energetică (curentul I) este iarăşi uniform distribuit pe toate elementele ansamblului, caz în care capacitanţa energetică magnetică (inductanţa) totală este tot suma capacitanţelor individuale:

$$L_T = L_1 + L_2 + ... + L_n \tag{1.2}$$

Dacă atributul de stare X din fig. 1.1 îl înlocuim cu I, cazul inductorilor înseriaţi privit ca o distribuţie a atributului de stare are ca schemă echivalentă tot fig. 1.1.

Comentariul 1.1: Fig. 1.1 nu trebuie interpretată ca o schemă electrică ci ca o distribuţie a atributelor U, I sau v, pe n obiecte materiale posesoare de capacitanţă energetică electrostatică, magnetică sau cinetică, obiecte ce formează un obiect compus.

În cazul maselor şi a energiei cinetice, situaţia atributului de stare energetică uniform distribuit este cea în care elementele componente ale sistemului în mişcare, chiar dacă au mase diferite, se mişcă cu aceeaşi unică viteză v, viteza de mişcare globală comună, <u>fără a mai exista componente specifice (individuale) ale vitezei pe fiecare element</u>. În acest caz, capacitanţa energetică totală (masa globală) este suma maselor componente.

Logic, după aceste prime constatări putem spune:

Concluzia 1: *Dacă atributul de stare energetică se distribuie uniform pe elementele unui sistem material compus, capacitanţa energetică de ordinul II rezultantă a sistemului este suma capacitanţelor elementelor.*

În cazul capacitorilor conectaţi în serie sau al inductorilor conectaţi în paralel, atributul de stare energetică (tensiunea la capacitori sau curentul la inductori) sunt distribuite neuniform. În aceste cazuri, capacitanţa totală este dată de relaţiile binecunoscute din electrotehnică:

$$\frac{1}{C_T}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+...+\frac{1}{C_n} \tag{1.3}$$

pentru capacitanţa electrostatică, respectiv:

$$\frac{1}{L_T}=\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}+...+\frac{1}{L_n} \tag{1.4}$$

pentru capacitanţa magnetică.

Comentariul 1.2: Atunci când discutăm despre compunerea capacitanţelor energetice ale unor sisteme materiale (SM), trebuie făcută o precizare foarte importantă - este vorba de capacitanţele energetice ale unor obiecte ce formează un obiect compus, fiecare component contribuind la capacitanţa obiectului compus fie cu întreaga sa capacitanţă, fie doar cu o parte din ea în funcţie de modul de compunere a elementelor obiectului compus (cum ar fi conectarea serie/paralel din exemplele de mai sus). Aşa cum am văzut în cap. 3, un obiect compus are o structură invariantă faţă de un sistem de referinţă (SR) intern, faţă de care sunt evaluate atributele interne, acest SR intern reprezentând obiectul compus în relaţiile sale externe. Ca urmare, capacitanţa obiectului compus este un atribut extern (evaluat faţă de un SR extern obiectului compus), dar atribuit SR intern.

Din relaţiile 1.3 şi 1.4 se poate observa că în ambele cazuri capacitanţa totală a ansamblului este mai mică decât suma capacitanţelor individuale, aşadar:

Concluzia 2: *Dacă elementele obiectului compus sunt conectate astfel încât atributul de stare energetică este distribuit neuniform, capacitanţa rezultantă a obiectului compus este întotdeauna mai mică decât suma capacitanţelor elementelor*.

Dacă raţionamentul de mai sus îl aplicăm şi asupra maselor, am putea spune că dacă elementele unui SM se mişcă cu viteze diferite, ar trebui ca masa totală să fie mai mică decât suma maselor individuale.

Să observăm că pentru capacitorii conectaţi în serie şi inductorii conectaţi în paralel există totuşi un atribut distribuit uniform, şi anume, produsul dintre capacitanţa energetică şi derivata temporală a atributului de stare energetică (curentul I în cazul capacitorilor şi tensiunea U în cazul inductorilor, vezi relaţiile 1.5. şi 1.6). În cazul maselor şi a energiei cinetice, dacă atributul de stare energetică (viteza v) este distribuit neuniform, atributul uniform distribuit în acest caz rezultă a fi forţa (vezi relaţiile 1.7).

Pentru cazurile particulare ale energiei electrostatice (relaţiile 1.5), magnetice (relaţiile 1.6) şi cinetice (relaţiile 1.7) avem:

$$\Delta Q = I\cdot\Delta t = C\cdot\Delta U \qquad I=\frac{\Delta Q}{\Delta t}=C\cdot\frac{\Delta U}{\Delta t} \qquad K_e^{''}=C \qquad X=U \tag{1.5}$$

$$\Delta B = U\cdot\Delta t = L\cdot\Delta I \qquad U=\frac{\Delta B}{\Delta t}=L\cdot\frac{\Delta I}{\Delta t} \qquad K_e^{''}=L \qquad X=I \tag{1.6}$$

$$\Delta p = F\cdot\Delta t = m\cdot\Delta v \qquad F=\frac{\Delta p}{\Delta t}=m\cdot\frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad K_e^{''}=m \qquad X=v \tag{1.7}$$

Într-un caz general capacitanţa energetică de ordinul II fiind $K_e^{''}$, dacă atributul de stare energetică este X, energia specifică ce corespunde acestui atribut[1] stocată în volumul sistemului material este:

$$W_x=\int_0^X K_e^{''}XdX=\tfrac{1}{2}K_e^{''}X^2 \tag{1.8}$$

[1] Este vorba strict de energia cu atributul de stare X ; în acelaşi SM mai pot fi stocate şi alte tipuri de energie, dar ale căror atribute de stare sunt diferite de X (cum ar fi de exemplu energia de repaus, energia termică etc.).

2 Cazul SM format din două elemente cu mase şi viteze diferite

Dacă avem un SM format din două corpuri ce orbitează împreună, menţinute de o forţă centripetă de atracţie (vezi fig. 2.1), cu vitezele individuale $\overline{v}_1$ şi $\overline{v}_2$, iar centrul lor de masă comun CM (refernţa internă T a sistemului) are viteza $\overline{v}_c$, rezultă că pe cele două obiecte viteza absolută este distribuită neuniform ($\overline{v}_c$ este uniform distribuită, dar există componentele specifice $\overline{v}_1$ şi $\overline{v}_2$). Dacă masele celor două corpuri sunt m_1 şi m_2 iar distanţa dintre ele *d*, rezultă cele două raze de revoluţie $r_1 + r_2 = d$. Faţă de un SR extern (absolut), vectorul de poziţie al CM este dat de relaţia:

$$\overline{r}_{CM} = \frac{m_1\overline{r}_1 + m_2\overline{r}_2}{m_1 + m_2} \tag{2.1}$$

Dacă referinţa internă o stabilim în CM, între $\overline{r}_1$ şi $\overline{r}_2$ vom avea relaţiile:

$$\frac{m_1\overline{r}_1 + m_2\overline{r}_2}{m_1 + m_2} = 0 \text{, adică (în modul) } \frac{m_1}{m_1 + m_2} r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r_2 \tag{2.2}$$

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1} r_2 = \frac{m_2}{m_1}(d - r_1)\,;\ r_1 + \frac{m_2}{m_1} r_1 = \frac{m_2}{m_1} d\,;\ r_1(1 + \frac{m_2}{m_1}) = \frac{m_2}{m_1} d\,;\ r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} d \tag{2.3}$$

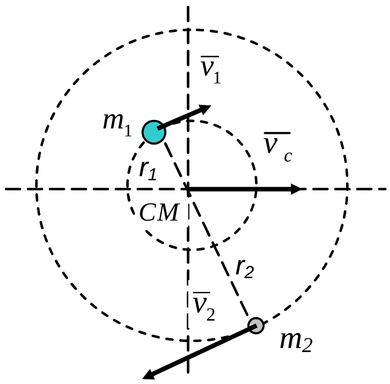

Fig. 2.1

În acest caz atributele interne invariante ale obiectului compus sunt distaţa *d* divizată în cele două raze de revoluţie r_1 şi r_2 faţă de CM şi viteza unghiulară $\overline{\omega}$ (atribut distribuit uniform pe cele două elemente) ce determină cele două viteze specifice:

$$\overline{v}_1 = \overline{\omega} \times \overline{r}_1 = v_{1x}\overline{i} + v_{1y}\overline{j} = \omega r_1 \cos(\omega t)\overline{i} + \omega r_1 \sin(\omega t)\overline{j} \tag{2.4}$$

şi:

$$\overline{v}_2 = \overline{\omega} \times \overline{r}_2 = v_{2x}\overline{i} + v_{2y}\overline{j} = \omega r_2 \cos(\omega t)\overline{i} + \omega r_2 \sin(\omega t)\overline{j} \tag{2.5}$$

unde $\overline{i}$, $\overline{j}$ sunt versorii axelor X şi Y.

Atenţie! Relaţiile 2.4 şi 2.5 sunt valabile doar dacă $\overline{v}_c$ este nulă (obiectul compus este în repaos faţă de referinţa externă). Deoarece $v = \omega r$, energiile cinetice ale celor două corpuri sunt:

$$W_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 \omega^2 r_1^2 \tag{2.6}$$

$$W_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_2 \omega^2 r_2^2 \tag{2.7}$$

Modulul forţei centripete/centrifuge (alt atribut distribuit uniform pe cele două elemente) este dat de relaţia:

$$|F| = \frac{m_1 v_1^2}{r_1} = \frac{m_2 v_2^2}{r_2} \tag{2.8}$$

din care se obţine pe baza relaţiilor 2.2 şi 2.3:

$$|F| = m_1\omega^2 r_1 = m_2\omega^2 r_2 = \omega^2 \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} d = \omega^2 \frac{m_2 m_1}{m_1+m_2} d = \omega^2 m_c d \tag{2.9}$$

Comentariul 2.1: Atât în relaţia 2.8 cât şi în 2.9 ne interesează doar modulul forţei centripete/centrifuge. Este evident că cele două forţe au sensuri opuse faţă de punctul lor teoretic de aplicare - centrul de masă CM. De remarcat că modulul forţei *F* (fluxul energetic de legătură) este proporţional cu masa compusă $m_c = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ dacă în locul razelor de revoluţie r_1 şi r_2 se ia în consideraţie distanţa *d*.

Dacă sistemul din fig. 2.1 se mişcă cu viteza $\overline{v}_c = v_{cx}\overline{i} + v_{cy}\overline{j}$ faţă de o referinţa externă considerată imobilă (referinţă absolută), atunci vitezele interne $\overline{v}_1$ şi $\overline{v}_2$ se vor compune cu $\overline{v}_c$ rezultând vitezele externe:

$$\overline{v}_{1e} = \overline{v}_1 + \overline{v}_c = (v_{1x}+v_{cx})\overline{i} + (v_{1y}+v_{cy})\overline{j} = (\omega r_1\cos(\omega t)+v_{cx})\overline{i} + (\omega r_1\sin(\omega t)+v_{cy})\overline{j} \tag{2.10}$$

$$\overline{v}_{2e} = \overline{v}_2 + \overline{v}_c = (v_{2x}+v_{cx})\overline{i} + (v_{2y}+v_{cy})\overline{j} = (\omega r_2\cos(\omega t)+v_{cx})\overline{i} + (\omega r_2\sin(\omega t)+v_{cy})\overline{j} \tag{2.11}$$

sau ţinând cont de relaţiile 2.3:

$$\overline{v}_{1e} = (\frac{\omega m_2 d}{m_1+m_2}\cos(\omega t)+v_{cx})\overline{i} + (\frac{\omega m_2 d}{m_1+m_2}\sin(\omega t)+v_{cy})\overline{j} \tag{2.12}$$

$$\overline{v}_{2e} = (\frac{\omega m_1 d}{m_1+m_2}\cos(\omega t)+v_{cx})\overline{i} + (\frac{\omega m_1 d}{m_1+m_2}\sin(\omega t)+v_{cy})\overline{j} \tag{2.13}$$

În aceste condiţii, energiile cinetice ale celor două corpuri sunt:

$$W_{1e} = \frac{1}{2}m_1 v_{1e}^2\,;W_{2e} = \frac{1}{2}m_2 v_{2e}^2 \qquad (2.14$$

iar dacă:

$$\begin{aligned} v_{1e}^2 &= v_{1x}^2 + 2v_{1x}v_{cx} + v_{cx}^2 + v_{1y}^2 + 2v_{1y}v_{cy} + v_{cy}^2 = \omega^2 r_1^2\cos^2(\omega t) + 2\omega r_1 v_{cx}\cos(\omega t) + v_{cx}^2 + \\ &+\omega^2 r_1^2\sin^2(\omega t) + 2\omega r_1 v_{cy}\sin(\omega t) + v_{cy}^2 = \omega^2 r_1^2 + 2\omega r_1(v_{cx}\cos(\omega t)+v_{cy}\sin(\omega t)) + v_c^2 \end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned} v_{2e}^2 &= v_{2x}^2 + 2v_{2x}v_{cx} + v_{cx}^2 + v_{2y}^2 + 2v_{2y}v_{cy} + v_{cy}^2 = \omega^2 r_2^2\cos^2(\omega t) + 2\omega r_2 v_{cx}\cos(\omega t) + v_{cx}^2 + \\ &+\omega^2 r_2^2\sin^2(\omega t) + 2\omega r_2 v_{cy}\sin(\omega t) + v_{cy}^2 = \omega^2 r_2^2 + 2\omega r_2(v_{cx}\cos(\omega t)+v_{cy}\sin(\omega t)) + v_c^2 \end{aligned} \tag{2.16}$$

atunci:

$$\begin{aligned} W_{1e} &= \frac{1}{2}m_1(\omega^2 r_1^2 + 2\omega r_1(v_{cx}\cos(\omega t)+v_{cy}\sin(\omega t)) + v_c^2) = \\ &\frac{1}{2}m_1\omega^2 r_1^2 + m_1\omega r_1(v_{cx}\cos(\omega t)+v_{cy}\sin(\omega t)) + \frac{1}{2}m_1 v_c^2 \end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned} W_{2e} &= \frac{1}{2}m_2(\omega^2 r_2^2 + 2\omega r_2(v_{cx}\cos(\omega t)+v_{cy}\sin(\omega t)) + v_c^2) = \\ &\frac{1}{2}m_2\omega^2 r_2^2 + m_2\omega r_2(v_{cx}\cos(\omega t)+v_{cy}\sin(\omega t)) + \frac{1}{2}m_2 v_c^2 \end{aligned} \tag{2.18}$$

iar dacă ţinem cont de relaţiile 2.2 şi 2.3 şi notăm $m_c = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$:

$$W_{1e} = \frac{1}{2m_1}\omega^2 d^2 m_c^2 + \omega d m_c(v_{cx}\cos(\omega t)+v_{cy}\sin(\omega t)) + \frac{1}{2}m_1 v_c^2 \tag{2.19}$$

$$W_{2e} = \frac{1}{2m_2}\omega^2 d^2 m_c^2 + \omega d m_c (v_{cx}\cos(\omega t) + v_{cy}\sin(\omega t)) + \frac{1}{2} m_2 v_c^2 \tag{2.20}$$

Dacă ţinem cont de relaţiile 2.6 şi 2.7 care exprimă energiile de repaos ale sistemului şi pe care le notăm:

$$W_{1r} = \frac{1}{2} m_1 \omega^2 r_1^2 = \frac{1}{2} m_1 \omega^2 \left(\frac{m_2 d}{m_1 + m_2}\right)^2 = \frac{1}{2m_1}\omega^2 d^2 m_c^2 \,; W_{2r} = \frac{1}{2m_2}\omega^2 d^2 m_c^2 \tag{2.21}$$

atunci relaţiile 2.19 şi 2.20 devin:

$$W_{1e} = W_{1r} + \omega d m_c (v_{cx}\cos(\omega t) + v_{cy}\sin(\omega t)) + \frac{1}{2} m_1 v_c^2 \tag{2.22}$$

$$W_{2e} = W_{2r} + \omega d m_c (v_{cx}\cos(\omega t) + v_{cy}\sin(\omega t)) + \frac{1}{2} m_2 v_c^2 \tag{2.23}$$

Energia totală a sistemului în mişcare faţă de referinţa externă este atunci:

$$\begin{aligned} W_e &= W_{1r} + W_{2r} + 2\omega d m_c (v_{cx}\cos(\omega t) + v_{cy}\sin(\omega t)) + \frac{1}{2} m_1 v_c^2 + \frac{1}{2} m_2 v_c^2 = \\ &W_r + W_c + 2\omega d m_c (v_{cx}\cos(\omega t) + v_{cy}\sin(\omega t)) \end{aligned} \tag{2.24}$$

unde:

$$W_r = W_{1r} + W_{2r} = \frac{1}{2m_1}\omega^2 d^2 m_c^2 + \frac{1}{2m_2}\omega^2 d^2 m_c^2 = \frac{1}{2}\omega^2 d^2 m_c^2 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = \frac{1}{2} m_c \omega^2 d^2 \tag{2.25}$$

este energia de repaos totală a sistemului, iar $W_c = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_c^2$ este energia totală cinetică.

Observăm că energia totală de repaos aşa cum este firesc, nu depinde de mişcarea de ansamblu cu $\overline{v}_c$, dar în relaţia sa de calcul intră masa compusă m_c, iar în expresia energiei cinetice totale, viteza $\overline{v}_c$ fiind uniform distribuită, masa totală este suma celor două mase.

Termenul suplimentar din relaţia 2.24 - $2\omega d m_c (v_{cx}\cos(\omega t) + v_{cy}\sin(\omega t))$ - reprezintă fluxul energetic recirculat între cele două elemente ale sistemului (cele două forţe centripete egale în modul ce menţin m_1 şi m_2 în mişcarea lor orbitală). Dacă ţinem cont de relaţia 2.9, putem scrie:

$$2\omega d m_c (v_{cx}\cos(\omega t) + v_{cy}\sin(\omega t)) = \frac{2\cos(\omega t)}{\omega}\left|F\right| v_{cx} + \frac{2\sin(\omega t)}{\omega}\left|F\right| v_{cy} \tag{2.25}$$

Puterea furnizată de un flux energetic (FE) unui SM (intensitatea FE prin suprafaţa reală de separaţie (SRS) a acestuia) este:

$$P = \left.\frac{\Delta E}{\Delta t}\right|_{SRS} = \overline{F}_e\,\overline{v}_c = \overline{F}_e \frac{\Delta \overline{r}}{\Delta t} = \frac{W}{\Delta t} \tag{2.26}$$

adică lucrul mecanic *W* efectuat de forţa $\overline{F}_e$ în intervalul *Δt*, împotriva inerţiei SM. Aici $\overline{v}_c$ este viteza de mişcare a SM (mai exact, a referinţei interne T a SM), dobândită în urma transferului (tranzacţiei) de energie de la FE exterior în cazul în care viteza iniţială a SM acţionat era nulă, viteză ce reprezintă schimbarea de stare energetică a SM în urma acţiunii FE.

Atenţie! În relaţia 2.26 $\overline{F}_e$ este forţa externă ce pune în mişcare SM cu viteza $\overline{v}_c$, în timp ce în relaţia 2.25 este vorba de forţa centripetă $\left|F\right|$ ce menţine sistemul (FE de legătură). Oricum, produsul *Fv* reprezintă intensitatea unui flux energetic, iar în cazul sistemului din fig.

2.1 relaţia 2.25 ne indică o modulaţie a fluxului energetic recirculat (forţa centripetă) cu amplitudinea $\dfrac{2(v_{cx}\cos(\omega t) + v_{cy}\sin(\omega t))}{\omega}$.

3 Concluzii

1. Capacitanţa energetică totală de ordinul II $K_{eT}^{''}$ a unui SM compus din *n* elemente pe care atributul de stare energetică *X* are o distribuţie uniformă este suma capacitanţelor energetice ale elementelor sale:

$$K_{eT}^{''} = \sum_{i=1}^{n} K_{ei}^{''} \tag{3.1}$$

2. În cazul unei distribuţii neuniforme a atributului de stare energetică *X*, <u>dar a distribuţiei uniforme a atributului</u> $Y = K_e^{''}\dfrac{dX}{dt}$ (produsul dintre capacitanţa energetică şi derivata temporală a atributului de stare energetică), capacitanţa SM compus este:

$$\frac{1}{K_{eT}^{''}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{K_{ei}^{''}} \tag{3.2}$$

3. Dacă în cazul capacitorilor şi inductorilor *n* poate avea valori oricât de mari atât în relaţia 3.1 cât şi în 3.2, în cazul maselor şi a relaţiei 3.2 *n* este limitat la 2, deoarece interacţiunea dintre SM cu masă este întotdeauna bilaterală (pe cupluri). În acest caz atributul *Y* este forţa dintre cele două elemente (distribuită uniform), iar masa compusă a cuplului cu masele m_1 şi m_2 este $m_c = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$.

4. Din p.d.v. dimensional termenul din relaţia 2.25 are dimensiunea unei densităţi unghiulare energetice $F \cdot \dfrac{LT^{-1}}{\alpha T^{-1}} = F \cdot \dfrac{L}{\alpha} = \dfrac{W}{\alpha}$